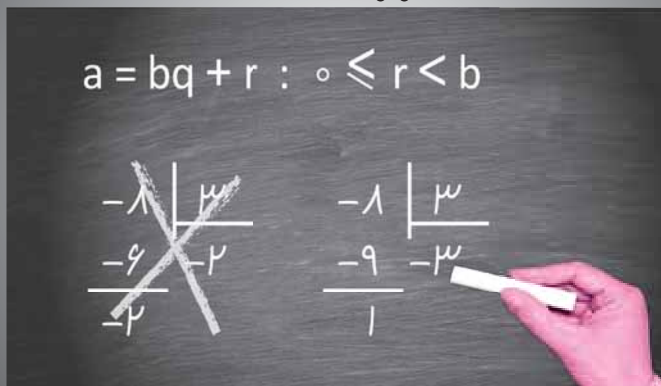
حمیدرضا امیری

قضیهٔ



ریاضیات گسسته
پایهٔ دوازدهم، رشتهٔ ریاضی

اشاره

می‌دانیم طبق قضیهٔ تقسیم، اگر a عددی صحیح (مقسوم) و b عددی طبیعی (مقسوم‌علیه) باشد، در این صورت عددهای صحیح و منحصربه‌فردی چون q (خارج قسمت) و r (باقی‌مانده) یافت می‌شوند، به قسمی که: $a=bq+r$ و $0\leq r<b$.
در این مقاله قصد داریم با اصطلاحات مقسوم، مقسوم‌علیه، خارج قسمت و باقی‌مانده به طرح و حل مسائلی بپردازیم. در همهٔ مسائل مطرح شده فقط از دو رابطهٔ موجود در قضیهٔ تقسیم، یعنی $a=bq+r$ و $0\leq r<b$ استفاده می‌شود. در حل مسائل بخش‌هایی را به‌صورت نقطه‌چین یا جای خالی باقی گذاشته‌ایم تا شما نیز در حل مسئله شرکت کنید و فعالیتی را انجام دهید.

مسئلهٔ ۱. در یک تقسیم، اگر ۵۸ واحد از مقسوم کم کنیم، ۶ واحد از خارج قسمت کم و به باقی‌مانده ۲ واحد اضافه می‌شود. مقسوم‌علیه را در این تقسیم بیابید.

حل: برای حل این نوع مسائل ابتدا یک تقسیم فرضی به شکل $a=bq+r$ را در نظر می‌گیریم. سپس مفروضات و معلومات داده شده را روی این تقسیم پیاده می‌کنیم (توجه داریم که تساوی $a=bq+r$ فرض ماست و هر کجا که لازم باشد از این تساوی استفاده می‌کنیم).

$$a=bq+r \xRightarrow{\text{فرض‌های داده شده}} a-58=b(q-6)+r+\dots$$
$$\Rightarrow a-58=bq-\dots+r+2 \quad (*)$$
$$\xRightarrow{a=bq+r} -58=-6b+2 \Rightarrow -6b=-60 \Rightarrow b=\dots$$

(توجه دارید که در تساوی *، اگر به جای a در سمت چپ طبق فرض قرار دهیم: $a=bq+r$ ، این مقدار از طرفین حذف می‌شود).

مسئلهٔ ۲. در یک تقسیم مقسوم ۱۲ برابر باقی‌مانده است و باقی‌مانده حداکثر مقدار خود را دارد. اجزای این تقسیم را به دست آورید.

حل: اجزای تقسیم عبارتند از: مقسوم، مقسوم‌علیه، خارج قسمت و باقی‌مانده که باید آن‌ها را به دست آوریم. ابتدا یک تقسیم فرضی می‌نویسیم و فرض‌های مسئله، یعنی $a=12r$ و $r=b-1$ (حداکثر باقی‌مانده) را در آن قرار می‌دهیم:

$$a=bq+r \Rightarrow 12(b-1)=bq+(\dots)$$
$$\Rightarrow 12b-\dots=bq+b-1 \Rightarrow 11b-bq=11$$
$$\Rightarrow b(11-q)=11\times 1\,(**) \Rightarrow \begin{cases} b=11 \\ 11-q=\dots \end{cases} (1) \text{ یا } \begin{cases} b=1 \\ 11-q=\dots \end{cases} (2)$$

حالت ۲ امکان‌پذیر ....، زیرا اگر $11-q=11$، یعنی $q=0$ که در این صورت با توجه به رابطهٔ $a=bq+r$ خواهیم داشت: $a=\dots$ که با فرض مسئله، یعنی $a=12r$ در ...... است. پس باید $b=11$ و $11-q=\dots$ یا $q=\dots$ باشد و بنابراین: $r=b-1=\dots$ و $a=12r$ یا $a=\dots$.

توجه دارید که اگر در طرف راست تساویِ **، مثلاً عدد ۱۲ به دست می‌آمد، می‌باید همهٔ حالت‌هایی را که ضرب دو عدد طبیعی ($b\in N$) مساوی با ۱۲ است، بررسی کنیم و با فرض‌های مسئله مطابقت دهیم تا تناقضی ایجاد نشود.

مسئلهٔ ۳. بزرگ‌ترین عدد طبیعی چون a را بیابید که اگر بر ۱۹۳ تقسیم شود، باقی‌ماندهٔ تقسیم، چهاربرابر مکعب خارج قسمت باشد.

حل: طبق فرض‌های مسئله و تقسیم فرضی که در نظر می‌گیریم، داریم: $a=۱۹۳q+r , r=۴q^۳ , ۰\le r<۱۹۳$

اگر به جای r در تساوی .... قرار دهیم $۴q^۳$، خواهیم داشت: $a=۱۹۳q+۴q^۳$ که یک معادلهٔ دومجهولی از درجهٔ ۳ برحسب q است.

اگر از نامساوی $۰\le r<۱۹۳$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$۰\le r<۱۹۳ , r=۴q^۳ \Rightarrow ۰\le ۴q^۳<...$

نامساوی اخیر چون در Z بررسی می‌شود، به راحتی محدوده‌ای برای q در Z مشخص می‌کند و براساس آن محدوده‌ای برای a به دست می‌آید:

$$۰\le ۴r^۳<۱۹۳ \xRightarrow{\text{تقسیم بر ۴}} ۰\le q^۳\le ... \xRightarrow{\text{ریشه سوم}} ۰\le q\le ۳$$

واضح است که اگر داشته باشیم: $q=۰$، در این صورت: $r=۴q^۳=...$ و لذا: $a=۰$ که عددی طبیعی برای a به دست نمی‌آید. پس به ازای $q=۱$، $q=۲$ و $q=۳$ برای a مقادیر مثبت و صحیح به دست می‌آید که به ازای $q=۳$ بزرگ‌ترین مقدار برای a حاصل می‌شود:

$$q=۳\Rightarrow r=۴q^۳=۴\times ...=۱۰۸, a=۱۹۳q+r$$
$$\Rightarrow a=۱۹۳\times ۳+۱۰۸\Rightarrow a=...$$

مسئلهٔ ۴. ثابت کنید در هر تقسیم دلخواه، اگر k برابر مقسوم‌علیه را به مقسوم اضافه کنیم و مقسوم‌علیه را تغییر ندهیم، باقی‌مانده تغییر نمی‌کند و به خارج قسمت k واحد اضافه می‌شود.

حل: فرض کنیم تقسیم دلخواه ما به‌صورت ....=a مفروض باشد. پس می‌توان نوشت:

$$a+kb=bq+...+r\Rightarrow (a+kb)=b(\underbrace{q+k}_{q'})+r(*)$$

در تساوی فرض، یعنی $a=bq+r$، همواره داریم: $۰\le r<b$ و چون تغییر نکرده است، در تساوی * نیز داریم $۰\le r<b$. لذا باقی‌مانده همان r است و تغییر نکرده، ولی در تساوی * داریم: $q'=q+k$؛ یعنی k واحد به خارج قسمت قبل اضافه شده و خارج قسمت جدید به دست آمده است.

نکته‌ای مهم و جالب

می‌دانیم که اگر x عددی حقیقی باشد، همواره می‌توان نوشت: $x=n+t$ که در آن داریم: $n\in Z$ و $۰\le t<۱$. طبق تعریف، n همان جزء صحیح x نامیده می‌شود؛ یعنی $[x]=n$.

$(۳/۷=۳+۰/۷, -۵/۷=-۶+۰/۳, ۱۲=۱۲+۰)$

از طرف دیگر در قضیهٔ تقسیم، با فرض اینکه $a\in Z$، $b\in N$ و $۰\le r<b$ داریم:

$$a=bq+r\Rightarrow \frac{a}{b}=q+\frac{r}{b}, ۰\le\frac{r}{b}<۱ \xRightarrow{\text{تعریف جزء صحیح}} q=[\frac{a}{b}]$$

با توجه به نکتهٔ فوق و بدون انجام مراحل تقسیم، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ۱۳۹۷ را بر ۲۳ بیابید.

$$q=[\frac{a}{b}]=[\frac{۱۳۹۷}{۲۳}]=۶۰, r=a-bq$$
$$\Rightarrow r=۱۳۹۷-(۲۳\times ...)=...$$

مسئلهٔ ۵. عدد زوج n را بر ۳۷ تقسیم می‌کنیم و باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲۵ به دست می‌آید. اگر $\frac{n+۴}{۲}$ را بر ۳۷ تقسیم کنیم، باقی‌مانده چه عددی است؟

حل: طبق فرض و بنابر قضیهٔ تقسیم داریم:

$n=۳۷q+۲۵\Rightarrow n+۴=۳۷q+...$

از طرف دیگر، چون طبق فرض n زوج است و داریم: $n=۳۷q+۲۵$، پس q باید فرد باشد (چرا؟) یعنی باید، $q=۲k+۱$ که اگر در آخرین تساوی قرار دهیم: $q=۲k+۱$، خواهیم داشت:

$$n+۴=۳۷(۲k+۱)+۲۹\Rightarrow \frac{n+۴}{۲}=\frac{۳۷\times ۲k}{۲}+...$$
$$\Rightarrow \frac{n+۴}{۲}=۳۷k+۳۳\Rightarrow r=۳۳$$

۱. در یک تقسیم، ۶ واحد به مقسوم‌علیه و ۵۴ واحد به مقسوم اضافه کردیم و باقی‌مانده و خارج‌قسمت تغییری نکردند. خارج قسمت را بیابید (جواب: q=۹).

۲. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر ۵ و ۶ به ترتیب ۳ و ۴ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد را بر ۳۰ بیابید.

۳. تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد طبیعی که وقتی بر ۹۷ تقسیم شوند، باقی‌ماندهٔ تقسیم از دو برابر مجذور خارج قسمت ۳ واحد بیشتر باشد، چه عددی است؟

۴. اگر در یک تقسیم، مقسوم ۹۰۰ واحد بیش از مقسوم‌علیه باشد و باقی‌مانده ۸۷ باشد، خارج‌قسمت را بیابید.